ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՍԻՍԱԿՅԱՆ ԱՐՈՒՍՅԱԿ ԱՐԱՄԻ

ՈՒՌՈՒՑԻԿ ՈՉ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՄԲ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ԱՆՇԱՐԺ ԿԵՏԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ա.01.02 - «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, Մաթեմատիկական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

ԵՐԵՎԱՆ 2022

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

СИСАКЯН АРУСЯК АРАМОВНА

ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"

Ереван 2022

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ե Պ Հ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհրդի հ. 34 նիստում (29.10.2019թ):

Գիտական ղեկավար՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Խ. Ա. Խաչատրյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Լ.Պ. Տեփոյան

- ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու
Հ. Ա. Ասատրյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ - Հայ-Ռուսական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2022թ. մարտի 15-ին ժամը 15:00-ին, Երևանի Պետական Համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե՝ ք.Երևան, 3750025, փ. Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե Պ Հ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2022թ. փետրվարի -ին:

050 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր՝ Տ. Ն. Հարությունյան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета факультета математики и механики ЕрГУ (№ 34, 29.10.2019г).

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук
Х.А. Хачатрян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук
Л.П. Тепоян

- кандидат физ.-мат. наук
А.А. Асатрян

Ведущая организация –Российско-Армянский Университет

Защита диссертации состоится 15-го марта 2022г. в 15:00 часов на заседании специализированного совета 050 при Ереванском государственном университете.

Адрес: г. Ереван, 3750025, ул. Алек Манкуяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЕрГУ.

Автореферат разослан -го февраля 2022г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук Т. Н. Арутюнян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Хорошо известно, что нелинейные уравнения сверточного типа на неограниченных областях, кроме чисто математического интереса, имеют важное прикладное значение в самых различных областях современного естествознания. В частности, такие уравнения возникают в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в теории переноса излучения в спектральных линиях, в кинетической теории газов (в рамках нелинейных модельных уравнений Больцмана), в математической теории пространственно-временного распространения пандемии, в эконометрике (в математической теории распределения национального дохода в рамках нелинейной модели Саргана) (см. [3]-[5], [9], [13], [19], [20]). С математической точки зрения важной отличительной особенностью таких уравнений являются некомпактность соответствующих интегральных операторов в рассматриваемых функциональных пространствах, свойство критичности (наличие тривиальных решений указанных уравнений), а также локальная монотонность функций, описывающих нелинейность исследуемых уравнений.

Отмеченные свойства указанных уравнений приводят к определенным затруднениям при построении нетривиальных решений в различных функциональных пространствах, поскольку применение классических принципов о неподвижных точках не всегда дает желаемый результат при изучении таких уравнений.

Тем не менее для различных конкретных классов таких уравнений важнейшие результаты были получены в работах М.А. Красносельского, П.П. Забрейко, В.С. Владимирова, Н.Б. Енгибаряна, Л.Г. Арабаджяна, И.В. Воловича, И.Я. Арефьевой, А.Г. Сергеева, А.Х. Хачатряна и Х.А. Хачатряна (см. [1]-[10], [12], [13], [15], [16], [18], [21]).

В частности, Л.Г. Арабаджяном построено однопараметрическое семейство положительных линейно растущих решений для одного класса квазилинейных интегральных уравнений на полуоси с четным консервативным ядром (см. [1]).

Н.Б. Енгибаряном изучен специальный класс нелинейных, неоднородных интегральных уравнений Урысоновского типа, соответствующий оператор которых обладает нетривиальным функционалом диссипации (см. [6]).

В работе В.С. Владимирова и Я.И Воловича изучены специальные интегральные уравнения на всей прямой со степенной нелинейностью и с разностным ядром, имеющим гауссовское распределение (см. [2]).

В работах Х.А. Хачатряна и А.Х. Хачатряна исследованы различные классы нелинейных интегральных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейна и Урысона. Построены нетривиальные ограниченные и суммируемые решения для таких уравнений. Изучены вопросы единственности и асимптотического поведения построенных решений (см. [12]-[16], [18]).

В работе А.Г. Сергеева и Х.А. Хачатряна (см. [9]) исследованы нелинейные многомерные интегральные уравнения в критическом случае. Такие уравнения возникают в математической биологии и в теории p-адических струн.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению и решению новых классов нелинейных интегральных уравнений сверточного типа, исследованию специальных классов интегральных уравнений с оператором Урысона (для которого миноранта в смысле М.А. Красносельского является нелинейным интегральным оператором со степенной нелинейностью), а также распространению полученных результатов на соответствующие системы нелинейных интегральных уравнений.

Таким образом, тематика диссертационной работы является весьма актуальной.

Цель работы. Основной целью настоящей диссертации является:

- построение нетривиальных неотрицательных и ограниченных решений для специальных классов нелинейных интегральных уравнений на полуоси с некомпактным оператором Урысона.

- доказательство существования однопараметрического семейства нетривиальных знакопеременных непрерывных и ограниченных решений для одного класса интегральных уравнений на всей прямой со степенной нелинейностью.

- исследование системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений со сверточным интегральным оператором на всей прямой.

- доказательство неотрицательных и ограниченных решений для нелинейных систем бесконечных алгебраических уравнений с матрицами Теплица-Ганкеля.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались методы построения инвариантных конусных отрезков для соответствующих нелинейных монотонных операторов, методы теории матриц, факторизационные методы, специальные итерационные методы, а также методы теории функции вещественной переменной.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми, обоснованны строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический и практический интерес. Они могут быть использованы в задачах динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в кинетической теории газов, в математической эпидемиологии, в теории переноса излучения в неоднородных средах.

Основные положения, выносимые на защиту. На основе проведенных исследований автором выносятся на защиту следующие положения:

- доказана теорема существования неотрицательного и существенно ограниченного решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой с некомпактным оператором Урысона, найден предел построенного решения в бесконечности,

- построено однопараметрическое семейство знакопеременных и ограниченных решений для специального класса интегральных уравнений на всей прямой со степенной нелинейностью,

- доказаны конструктивные теоремы существования нетривиальных решений в определенном весовом классе для одной системы нелинейных сингулярных уравнений на всей прямой, исследованы некоторые качественные свойства построенных решений,

- доказана теорема существования неотрицательного решения в пространстве ограниченных последовательностей для одной системы нелинейных бесконечных алгебраических уравнений с матрицами Теплица-Ганкеля.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на международной конференции “По дифференциальным уравнениям и динамическим системам” 2020 г.,DIFF-2020, г. Суздель, 3-8 июля,(online), на семинарах отдела методов математической физики Института Математики НАН Армении, на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Ереванского Государственного Университета, на семинарах кафедры высшей математики и физики Армянского Национального Аграрного Университета.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, содержащих 14 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего в себя 96 наименований. Общий объем диссертации составляет 83 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов и изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена изучению и решению одного класса нелинейных интегральных уравнений Урысона на положительной полуоси, а также исследованию специального класса интегральных уравнений Гаммерштейна со степенной нелинейностью и субстохастическим ядром.

В первой части главы 1 рассматривается следующий класс нелинейных интегральных уравнений Урысоновского типа:

$$f(x) = \int\limits_0^\infty U(x,t,f(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ := [0,+\infty) \tag{1}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро Урысона $U(x,t,z)$ определено на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, принимает вещественные значения, удовлетворяет условию “критичности”:

$$U(x,t,0) \equiv 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

и обладает определенными дополнительными свойствами (см. формулировку основного результата).

Многочисленными частными случаями уравнения (1) описываются ряд задач современного естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в кинетической теории газов (в нелинейных уравнениях Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара-Гросса-Крука), в динамической теории p-адических струн, в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [2]-[5], [11]).

История изучения и решения нелинейных интегральных уравнений подобного рода началась в 1920-е годы с работы [10], в которой соответствующие нелинейные уравнения были рассмотрены на ограниченных множествах. В дальнейшем в работах М.А. Красносельского, Ф. Браудера, П.П. Забрейко, Г. Брейзиса такие уравнения были подробно и систематически исследованы, были найдены необходимые и достаточные условия компактности соответствующих нелинейных интегральных операторов в различных функциональных пространствах (см. [7], [8]). В работах Х.А. Хачатряна (см. [12], [15], [22]) проведены детальные и систематические исследования нелинейных интегральных уравнений вида (1) с оператором Урысона, не обладающим свойством компактности, и с операторами, для которых минорантой в смысле М.А. Красносельского служит линейный интегральный оператор типа Винера-Хопфа.

В первой главе, в предположении, что сверточный оператор Гаммерштейна со степенной нелинейностью является минорантой для исходного некомпактного оператора Урысона, доказано существование неотрицательного и ограниченного решения уравнения (1).

Для формулировки теоремы существования нам понадобятся следующие обозначения.

Пусть функция $K(\tau)$ определена на множестве $\mathbb{R}$ и удовлетворяет следующим ограничениям:

$$K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tau|^j K(\tau) d\tau < +\infty, \quad j = 1, 2, \tag{3}$$

$$K(-x) = K(x), \quad x \geq 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = 1, \quad K(\tau) \downarrow \text{ по } \tau, \text{ на } \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

$$K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Пусть функция $\lambda(x)$ определена на $\mathbb{R}^+$ и обладает свойствами:

$$0 \leq \lambda(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad x^j(1 - \lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad j = 0, 1,$$

$$\lambda \in C(\mathbb{R}^+), \quad \lambda(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+.$$

В §1.2 доказывается следующий результат для уравнения (1).

Теорема 1.1. *Пусть существуют числа $\xi > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что*

1) $U(x, t, z) \geq \lambda(x)(K(x - t) - K(x + t)) z^\alpha \xi^{1-\alpha}$,
$\forall\ (x, t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \xi] := \Omega_\xi$,

2) *при каждом фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $U(x, t, z) \uparrow$ по z на* $[0, \xi]$,

3) $\int\limits_0^\infty U(x,t,\xi)dt \le \xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+,$

4) *функция* $U(x,t,z)$ *удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу* z *на множестве* Ω_ξ, *т.е. при каждом фиксированном* $z \in [0,\xi]$ *функция* $U(x,t,z)$ *измерима по* $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *и почти при всех* $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ *непрерывна по* z *на отрезке* $[0,\xi]$,

5) *для каждой измеримой функции* $\varphi(t) : 0 \le \varphi(t) \le \xi$, $t \in \mathbb{R}^+$, *функция* $\int\limits_0^\infty U(x,t,\varphi(t))dt$ *измерима по* x *на* $\mathbb{R}^+$.

Тогда уравнение (1) *имеет неотрицательное и нетривиальное решение* $f(x)$, *причем* $0 \le f(x) \le \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \xi$.

Замечание 1.1. *Следует отметить, что если ядро Урысона* $U(x,t,z)$ *непрерывно по совокупности своих аргументов на множестве* Ω_ξ, *то условия 4) и 5) автоматически выполняются.*

В §1.3 приведены конкретные частные примеры ядра $U(x,t,z)$, для которых выполняются все условия доказанной теоремы 1.1.

Вторая часть первой главы посвящена разрешимости следующего класса интегральных уравнений со степенной нелинейностью на всей прямой:

$$f^p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

относительно искомой непрерывной и вещественной функции $f(x)$. В уравнении (6) показатель $p > 2$ является нечетным числом, а ядро K имеет следующую структуру:

$$K(x,t) = \int\limits_a^b \alpha(x,s)e^{-\alpha(x,s)|x-t|}d\sigma(s), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{7}$$

где $\sigma(s)$ — монотонно неубывающая на $[a,b)$ функция, удовлетворяющая следующему условию:

$$\int\limits_a^b d\sigma(s) = \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$

Функция $\alpha(x,s)$ определена на множестве $\mathbb{R} \times [a,b) \quad (0 < a < b \le +\infty)$ и обладает следующими свойствами:

A) $\alpha \in C(\mathbb{R} \times [a,b))$,

B) существует число $\beta > 0$ такое, что

$$\alpha(x,s) \geq \beta, \quad (x,s) \in \mathbb{R} \times [a,b), \qquad \sup_{(x,s)\in\mathbb{R}\times[a,b)} \alpha(x,s) < 2\beta, \tag{9}$$

C) $\alpha(x,s)$ симметрична по первому аргументу:

$$\alpha(-x,s) = \alpha(x,s), \quad x \geq 0, \quad s \in [a,b), \tag{10}$$

D) существует число $T > 0$, являющееся основным периодом для функции $\alpha(x,s)$ по аргументу x, т.е. $\alpha(x+T,s) = \alpha(x,s), \ \forall \ (x,s) \in \mathbb{R} \times [a,b)$.

Решение уравнения (6) ищется в следующем классе непрерывных на $\mathbb{R}$ функций:

$$\Pi = \{\varphi : \quad \varphi(-x) = -\varphi(x), \quad x \geq 0, \quad \varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})\}, \tag{11}$$

где $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство существенно ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}$.

Уравнение (6) встречается в кинетической теории газов при изучении нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках модифицированной модели Бхантагара-Гросса-Крука. В линейном случае, когда $p = 1$ и $K(x,t) = 0$ при $t < 0$, уравнение (6) подробно исследовалось в работах [17], [18]. В том частном случае, когда $\alpha \equiv const$, а $p > 2$ − нечетное число, уравнение (6) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению типа Риккати.

В §1.4 решение уравнения (6) сводится к решению следующего нелинейного интегрального уравнения на положительной полупрямой:

$$F^p(x) = \int_0^\infty (K(x,t) - K_0(x,t))\, F(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{12}$$

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \geq 0, \\ -F(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

где $K(x,t)$ задается согласно формуле (7), а $K_0(x,t)$ имеет следующий вид:

$$K_0(x,t) = \int_a^b \alpha(x,s) e^{-\alpha(x,s)(x+t)} d\sigma(s), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

и для одного вспомогательного линейного неоднородного уравнения доказывается существование суммируемого и существенно ограниченного решения.

Затем в параграфе §1.5 изучается следующее однородное вспомогательное линейное интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$S(x) = \int_x^{\infty} \Big(V(x,t) - \tilde{V}(x,t)\Big) S(t)dt, \tag{14}$$

где $V(x,t) = 2K(x,t)\theta(t-x), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, θ — функция Хевисайда,

$$\tilde{V}(x,t) = 2\int_a^b \alpha(x,s)e^{-\alpha(x,s)(x+t)}d\sigma(s), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{15}$$

Для уравнения (14) доказывается следующий результат:

Теорема 1.2. *При условиях* (8), $A) - C)$ *уравнение* (14) *обладает неотрицательным нетривиальным и существенно ограниченным решением* S, *причем* $1 - S \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Далее, в §1.6 исследуется вспомогательное уравнение (12). Доказывается следующая

Теорема 1.3. *При условиях* (8), $A) - C)$ *уравнение* (12) *имеет неотрицательное нетривиальное непрерывное и ограниченное на* $\mathbb{R}^+$ *решение* $F(x)$ *, причем имеет место следующая оценка:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} S(x) \le F(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

где $S(x)$ *– нетривиальное ограниченное решение уравнения* (14).

Используя данный результат для уравнения (6) доказывается следующая основная теорема.

Теорема 1.4. *При условиях* (8), $A) - D)$ *уравнение* (6) *обладает однопараметрическим семейством нетривиальных решений вида* $f_n(x) = f(x + nT), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$ *где*

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \ge 0, \\ -F(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

а $F(x)$ *– неотрицательное нетривиальное и существенно ограниченное решение уравнения* (12), *удовлетворяющее неравенству* (16).

Далее, приводятся конкретные примеры функции $\alpha(x,s)$, удовлетворяющей условиям $A) - D)$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена исследованию следующей системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений:

$$F_i^m(x) = (\mu_i(x) - 1)F_i^n(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(x-t)F_j(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{17}$$

относительно искомой измеримой и нечетной вектор-функции $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x))^T$ (T — знак транспонирования).

Предполагается, что

$$m,\ n - \text{нечетные числа и } \ m > 2n, \tag{18}$$

$$\mu_i(0) = +\infty, \quad \mu_i(x) \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to +\infty} \mu_i(x) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{19}$$

$$\mu_i(-x) = \mu_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, +\infty), \quad \mu_i - 1 \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_2(\mathbb{R}^+), \tag{20}$$

$$K_{ij}(x) > 0, \quad K_{ij}(-x) = K_{ij}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad K_{ij} \downarrow \text{по } x \text{ на } [0, +\infty), \tag{21}$$

$$K_{ij} \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \tag{22}$$

$$a_{ij} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K_{ij}(t)dt, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N \times N}, \quad r(A) = 1, \tag{23}$$

$$\nu_{ij} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x| K_{ij}(x)dx < +\infty, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \tag{24}$$

где $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, а $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

Система (17) возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [2], [4], [5]). Такие уравнения встречаются также в космологии (см. [19]).

При $N = 1$ уравнение (17) исследовалось в работах [2]-[5]. В частности в работах В.С. Владимирова рассмотрен скалярный аналог системы (17) в случае, когда

$$m = p^2, \quad n = \frac{p(p-1)}{2} - 1, \quad m,\ n \text{ и } p - \text{нечетные числа}, \quad p > 2,$$

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad \mu(x) = \lambda^2 \frac{p-1}{2p} \left(\Phi^{p-1}(x) - 1 \right) + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in [0, 1),$$

где

$$\Phi(-0) = +\infty, \quad \Phi(-x) = -\Phi(x), \quad x > 0,$$

$$\Phi(\pm\infty) = \mp 1, \quad \Phi^{p-1} - 1 \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_2(\mathbb{R}^+).$$

Данное уравнение достаточно подробно исследовалось В.С. Владимировым (см. [2]) в случае, когда $\lambda = 0$.

Во второй главе, используя некоторые подходы и результаты из работы [13] удается доказать существование неотрицательного нечетного решения в определенном весовом пространстве, а также изучить асимптотическое поведение построенного решения в $\pm\infty$.

В §2.2 сперва рассматривается следующая вспомогательная система нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на полуоси:

$$\psi_i^m(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_0^\infty \left(K_{ij}(x-t) - K_{ij}(x+t)\right)\psi_j(t)dt, \quad x \in [0, +\infty) \tag{25}$$

относительно искомой непрерывной вектор-функции $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_N(x))^T$.

Для системы (25) доказывается следующая

Теорема 2.1. *Пусть ядра* $\{K_{ij}\}_{i,j=1}^{N\times N}$ *удовлетворяют условиям* (21)-(23). *Тогда для любого нечетного* $m > 2$ *система* (25) *имеет неотрицательное (нетривиальное) непрерывное неубывающее и ограниченное решение на* $[0, +\infty)$. *Более того, данное решение удовлетворяет следующему двойному неравенству:*

$$\tilde{\varphi}_i(x) \le \psi_i(x) \le \eta_i^*, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\tilde{\varphi}_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ *неотрицательное (нетривиальное) решение системы* (25) *когда* $m = 3$, *а* $\eta_i^* = \dfrac{\eta_i}{\min\limits_{1\le i\le N} \eta_i} \ge 1$, $i = 1, 2, \ldots, N$ *и числа* $\{\eta_i\}_{i=1}^N$, $\eta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$ *определяются из следующей системы линейных алгебраических уравнений:*

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\eta_j = \eta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Если ядра $\{K_{ij}\}_{i,j=1}^{N\times N}$ *удовлетворяют также дополнительному условию*

$$\frac{\min\limits_{1\le i,j\le N} a_{ij}}{\max\limits_{1\le i,j\le N} a_{ij}} > \frac{1}{\sqrt[m-1]{m}}, \tag{26}$$

то $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi_i(x)=\lambda_i$, $i=1,2,\ldots,N$, *где числа* $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ *единственным образом определяются из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:*

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\lambda_j=\lambda_i^m,\quad i=1,2,\ldots,N,$$

причем $\frac{\eta_i^*}{\max\eta_i^*}\le\lambda_i\le\eta_i^*$, $i=1,2,\ldots,N$.

Далее, в лемме 2.2 доказывается, что при дополнительном условии (24) решение системы (25) обладает следующей интегральной асимптотикой:

$$\lambda_i-\psi_i\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad i=1,2,\ldots,N.$$

В §2.3 проблема решения основной системы (17) сводится к решению следующей системы нелинейных сингулярных интегральных уравнений на положительной полупрямой:

$$f_i^m(x)=(\mu_i(x)-1)f_i^n(x)+\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^\infty\left(K_{ij}(x-t)-K_{ij}(x+t)\right)f_j(t)dt, \tag{27}$$
$$x\in\mathbb{R}^+,\quad i=1,2,\ldots,N$$

относительно вектор-функции $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_N(x))^T$.

Доказывается следующий вспомогательный факт:

Лемма 2.3. *При условиях* (18)-(23) *система* (27) *имеет неотрицательное измеримое решение* $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_N(x))^T$, *причем данное решение удовлетворяет следующему двойному неравенству:*

$$\psi_i(x)\le f_i(x)\le(\lambda^*+M)^{\frac{1}{m-1}}\mu_i^{\frac{1}{n}}(x),\quad i=1,2,\ldots,N,\quad x\in\mathbb{R}^+, \tag{28}$$

где

$$M_i=\int\limits_0^\infty(\mu_i(t)-1)dt\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}\sum_{j=1}^{N}K_{ij}(x)<+\infty,\quad i=1,2,\ldots,N,$$
$$M=\max\{M_1,M_2,\ldots,M_N\},\quad \lambda^*=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N\}.$$

Используя неравенство (28) и некоторые дополнительные априорные оценки, в §2.4 доказывается, что

$$f-\psi\in L_1^{\times N}(\mathbb{R}^+):=\underbrace{L_1(\mathbb{R}^+)\times\cdots\times L_1(\mathbb{R}^+)}_{N}$$

(см. лемму 2.4).

Наконец, в §2.5 с использованием приведенных результатов доказывается следующий основной результат второй главы:

Теорема 2.2. *При условиях* (18)-(24), (26) *система нелинейных интегральных уравнений* (17) *обладает нечетным нетривиальным решением вида*

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x > 0, \\ -f(-x), & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

причем существует $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F_i(x) = \pm\lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N$. *Более того, данное решение обладает следующими свойствами:*

I. $\psi_i(x) \le F_i(x) \le (\lambda^* + M)^{\frac{1}{m-1}} \mu_i^{\frac{1}{n}}(x), \quad x > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$
$-(\lambda^* + M)^{\frac{1}{m-1}} \mu_i^{\frac{1}{n}}(x) \le F_i(x) \le -\psi_i(-x), \quad x < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$

II. $\lambda_i - F_i \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \lambda_i + F_i \in L_1(\mathbb{R}^-), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$

Далее, устанавливается, что $F_i(\pm 0) = \pm\infty$.

В конце второй главы приводятся наглядные примеры функций $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ и ядер $\{K_{ij}\}_{i,j=1}^{N\times N}$, удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем и лемм.

Третья глава диссертации посвящена вопросу разрешимости следующей системы бесконечных алгебраических уравнений с выпуклой и монотонной нелинейностью:

$$Q(x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} (a_{n-j} - a_{n+j})\lambda_j x_j, \quad n \in \mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{29}$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)^T$ с неотрицательными координатами.

В системе (29) последовательность элементов $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $a_i > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j = 1$ (условие консервативности),

2) $a_{i+1} < a_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$ (условие монотонности),

3) $a_j = a_{-j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$ (условие симметричности),

4) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j a_j < +\infty$ (условие конечности первого момента).

Последовательность чисел $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ обладает следующими свойствами:

a) $\lambda_j \ge 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$

b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}(\lambda_j - 1) < +\infty.$

Функция Q описывает нелинейность системы (29) и удовлетворяет следующим условиям:

A) Q — непрерывная функция на множестве $[0, +\infty)$, и уравнение $Q(u) = (1 + M)u$ имеет положительное решение, где

$$M := a_0 \sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_j - 1) < +\infty,$$

B) Q — монотонно возрастающая функция на отрезке $[0, \xi]$, где число ξ является первым положительным корнем уравнения $Q(u) = (1 + M)u$,

C) Q — выпуклая вниз на отрезке $[0, \xi]$ функция, причем $Q(0) = 0$,

D) существует число $\eta > 0$ такое, что $Q(\eta) = \eta$.

Система (29), кроме математического интереса, имеет приложения в дискретных задачах теории p-адических открыто-замкнутых струн (см. [2], [5]). Системы вида (29) встречаются также в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (см. [20]). В том частном случае, когда

$$\lambda_j \equiv 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \quad Q(u) = au^p + (1 - a)u,$$

где $a \in (0, 1]$, $\quad p > 2$ – нечетное число, система (29) и ее двумерный аналог достаточно подробно исследовались в работах Х.А. Хачатряна и его соавторов (см. [14], [21]). Небезынтересно отметить также, что непрерывный аналог системы (29) был изучен в работе [16].

Основным результатом третьей главы является следующая

Теорема 3.1. *При условиях* 1) – 4), a), b) *и* A) – D) *система* (29) *обладает неотрицательным нетривиальным решением* $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)^T$ *в пространстве ограниченных последовательностей, причем* $x_n \le \xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$. *Более того,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\eta - x_n| < +\infty.$$

В конце третьей главы приводятся конкретные прикладные примеры функции Q и последовательностей $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[4].

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.м. наук, профессору Х.А. Хачатряну за постановку задач и многочисленные полезные советы при выполнении работы.

Литература

[1] Л.Г. Арабаджян. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, Известия НАН Армении, Математика, 1997 г., том 32, № 1, стр. 21–28.

[2] В.С. Владимиров, Я.И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны, ТМФ, 2004 г., том 138, № 3, стр. 355–368.

[3] В.С. Владимиров. О нелинейном уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля, УМН, 2005 г., 60:6(366), стр. 73–88.

[4] В.С. Владимиров. Об уравнении p-адической открытой струны для скалярного поля тахионов, Известия РАН Серия Математическая, 2005 г., том 69, № 3, стр. 55–80.

[5] В.С. Владимиров. О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн, ТМФ, 2006 г., том 149, № 3, стр. 354–367.

[6] Н.Б. Енгибарян. О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае, Известия РАН Серия Математическая, 2006 г., том 70, № 5, стр. 79–96.

[7] П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник. О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p, УМН, 1964 г., том 19, № 2 (116), стр. 204–205.

[8] М.А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматлит, 1962 г., - 394 стр.

[9] А.Г. Сергеев, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии, Труды ММО, 2019 г., том 80, № 1, стр. 113–131.

[10] П. Урысон. Об одном типе нелинейных уравнений, Мат.. сборник, 1923 г., том 31, № 2, стр. 236–255.

[11] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях. ТМФ, 2012 г., том 172, № 3, стр. 497–504.

[12] Х.А. Хачатрян. Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью, Известия РАН, Серия Математическая, 2012 г., том 76, № 1, стр. 173–200.

[13] Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны, Известия РАН, Серия Математическая, 2018 г., том 82, № 2, стр. 172–193.

[14] Х.А. Хачатрян, С.М. Андриян. О разрешимости одного класса дискретных матричных уравнений с кубической нелинейностью, Украинский мат. журнал, 2019 г., том 71, № 12, стр. 1667–1683.

[15] Х.А. Хачатрян. Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения на полуоси. Докл. РАН, 2009 г., том 425, № 4, стр. 462–465.

[16] Х.А. Хачатрян. О разрешимости нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки, Труды ММО, 2020 г., том 81, № 1, стр. 3–40.

[17] Х.А.Хачатрян. Разрешимость консервативного интегрального уравнения на полуоси. Известия НАН Армении, математика, 2002 г., том 37, № 4, стр. 30–37.

[18] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором, Мат. сборник, 2010 г., том 201, № 4, стр. 125–136.

[19] I.Ya. Aref'eva, I.V. Volovich. Cosmological daemon, Journal of High Energy Physics, 8:8, 102 pp., 2011.

[20] Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, Journal of Mathematical Biology, 1978, vol. 6, № 2, pp. 109–130.

[21] Kh.A. Khachatryan, M.F. Broyan. One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz-Hankel type Matrices. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2013 vol. 48, № 5, pp. 189–200.

[22] Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan. On the solvability of a class of nonlinear Urysohn integral equations on the positive half-line, The Bulletin of Irkutsk State University. Series "Mathematics", 2021, 36, pp. 57–68.

Список опубликованных работ по теме диссертации

[1] Х.А. Хачатрян, А.А. Сисакян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой, Вестник РАУ 2017 г., № 2, стр. 25–40.

[2] Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян, А.А. Сисакян. О нетривиальной разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона, Тр. ИММ УрО РАН, 2017 г., том 23, № 2, стр. 266–273. (in Scopus)

[3] Kh.A. Khachatryan, S.M. Andriyan, A.A. Sisakyan. On the solvability of a class of boundary value problems for systems of the integral equations with power nonlinearity on the whole axis, Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat., 2018, vol 2, pp. 54–73. (in Scopus)

[4] А.А. Сисакян. О разрешимости одной системы бесконечных алгебраических уравнений с выпуклой нелинейностью и с матрицами Теплица-Ганкеля, Вестник РАУ, 2020 г., № 2, стр. 38–44.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ա.Ա. Միսակյան

ՈՒՌՈՒՑԻԿ ՈՉ ԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՄԲ ՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ԱՆՇԱՐԺ ԿԵՏԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ատենախոսական աշխատանքը նվիրված է կիսառանցքի և ամբողջ առանցքի վրա սկալյար և վեկտորական ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների որոշ դասերի հետազոտմանն ու լուծմանը: Այդպիսի հավասարումներ ծագում են բնագիտության տարբեր ուղղություններում: Մասնավորապես այդ բնույթի հավասարումներ հանդիպում են տախիոնյան սկալյար դաշտերում p-ադիկ բաց և փակ լարերի տեսության մեջ, մաթեմատիկական կենսաբանության մեջ (վարակի աշխարհագրական տարածման տեսության մեջ՝ Դիկման-Կապերի հայտնի մոդելի շրջանակներում), գազերի կինետիկ տեսության մեջ (Բոլցմանի հավասարման համար՝ Բհատնագար-Գրոս-Կրուկի մոդիֆիկացված մոդելներում): Հաջորդական մոտարկումների մեթոդի, ինչպես նաև փաթեթի տիպի գծային ինտեգրալ օպերատորների տեսության և մատրիցների տեսության մեթոդների միջոցով ատենախոսությունում հաջողվել է ստանալ սահմանափակ ոչ տրիվիալ լուծումների գոյության կոնստրուկտիվ թեորեմներ: Հետազոտվել են նաև կառուցված լուծումների որոշ որակական հատկություններ:

Ատենախոսությունում ստացված հիմնական արդյունքները կայանում են հետևյալում:

- Ապացուցվել է ոչ բացասական և սահմանափակ լուծման գոյության թեորեմ Ուրիսոնի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների մի դասի համար, որոնց համապատասխան օպերատորի մինորանտ է հանդիսանում աստիճանային ոչ գծայնությամբ և գումարա-տարբերական կորիզով Համերշտեյնի օպերատորը:

- Կառուցվել են ամբողջ առանցքի վրա, մոնոտոն և ուռուցիկ ոչ գծայնությամբ ինտեգրալ հավասարումների մի դասի համար ոչ տրիվիալ նշանափոխ և սահմանափակ լուծումներ:

- Ապացուցվել է ոչ տրիվիալ լուծման գոյության կոնստրուկտիվ թեորեմ որոշակի կշռային տարածությունում, փաթեթի տիպի կրկնակի ոչ գծայնությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մի համակարգի համար: Հետազոտվել են կառուցված լուծման որոշ որակական հատկություններ:

- Տյոպլից-Հանկելի անվերջ մատրիցներով ոչ գծային դիսկրետ հավասարումների մի դասի համար ապացուցվել է ոչ բացասական ոչ տրիվիալ, սահմանափակ հաջորդականությունների տարածությանը պատկանող լուծման գոյության թեորեմ: Հետազոտվել է կառուցված լուծման ասիմպտոտիկ վարքն անվերջությունում: Մասնավորապես ապացուցվել է, որ կառուցվող լուծման սահմանի (անվերջությունում) և լուծման տարբերությունը պատկանում է l_1 տարածությանը:

R E S U M E

Arusyak Sisakyan

Issues of construction fixed points of some integral operators with convex nonlinearity

The work is devoted to the study and solution of some classes of scalar and vectorial nonlinear integral equations on semi axis and whole axis. These types of equations arise in different of natural sciences: in particular in p - adic open-closed string theory for scalar field of tachyons, in mathematical biology (in theory of geographical spread of epidemics in framework of famous Diekmann-Kapper model), in kinetic theory of gases (Boltzmann equation in modified model of Bhatnagar-Gross-Krock).

With the use and development of iterative methods, methods of theory of linear convolution type linear integral equations, as well as matrix theory this dissertation managed to get constrictive theorems for the existence of bounded nontrivial solutions. Some qualitative properties of constructed solutions has been also studied.

Main results of the dissertation are as follows:

- The theorem of existence of the nonnegative and bounded solution for an one class of Urysohn type nonlinear integral equations for which Hammerstein's operator with sum-difference kernel and with power nonlinearity is a minorant of corresponding operator has been proved

- Nontrivial alternating and bounded solutions for a class of integral equations with monotone and convex nonlinearity on whole axis have been constructed.

- The constructive theorem of existence of nontrivial solution on a certain weighted space for a system of singular convolution type integral equations with double nonlinearity is proved. Some qualitative properties of the constructed solution is studied.

- For a class of nonlinear discrete equations with infinite Teoplitz-Hankel matrices, the existence theorem for a nonnegative and nontrivial solution in the space of bounded sequences is proved. The asymptotic behavior of constructed solution at infinity has been studied. In particular, it is proved that the difference between the limit (at infinity) and the solution belongs to the space l_1.