

Ա. Ի. ԱԼԻԽԱՆՅԱՆԻ ԱՆՎԱՆ ԱԶԳԱՅԻՆ ԳԻՏԱԿԱՆ ԼԱԲՈՐԱՏՈՐԻԱ  
(ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ)

Հրանտ Թոփչյան Արմենի

Եզրային վիճակները քվանտային Հոլի էֆֆեկտում  
և տոպոլոգիական մեկուսիչներում

Ա.04.02 - «Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական  
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ - 2024

---

A. I. ALIKHANYAN NATIONAL SCIENCE LABORATORY  
(YEREVAN PHYSICS INSTITUTE)

Hrant Topchyan

Edge states in quantum Hall effect  
and in topological insulators

SYNOPSIS

of dissertation in 01.04.02 – Theoretical physics presented for  
the degree of candidate in physical and mathematical sciences

YEREVAN – 2024

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Ա. Ի. Ալիխանյանի անվան ազգային գիտական լաբորատորիայի (ԵրՖԻ) գիտական խորհրդում:

Գիտական ղեկավար՝

Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր

Սեդրակյան Արա Գրիգորի (ԱԱԳԼ)

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր

Բաբուջյան Հրաչյա Մաղաթի (ԱԱԳԼ)

Ֆ.մ.գ.դ, ՌԳԱ թղթ. անդամ

Բելավին Ալեքսանդր Աբրամի (ՌԳԱ ՏՀՊԻ)

Առաջատար կազմակերպություն՝

Լ. Դ. Լանդաուի անվան տեսական ֆիզիկայի ինստիտուտ, Չեռնոգոլովկա, ՌԴ

Ատենախոսության պաշտպանությունը կայանալու է 2024 թ. մարտի 11-ին՝ ժամը 14:00-ին, ԱԱԳԼ-ում գործող ԲԿԳԿ-ի 024 «Ֆիզիկայի» մասնագիտական խորհրդում (Երևան, 0036, Ալիխանյան եղբայրների փ. 2):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԱԱԳԼ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2024 թ. հունվարի 31-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար՝

Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր

Հրաչյա Մարուքյան

---

The subject of the dissertation is approved by the scientific council of A. I. Alikhanyan National Science Laboratory (YerPhI).

Scientific supervisor:

Doctor of phys-math. sciences

Ara Sedrakyan (AANL)

Official opponents:

Doctor of phys-math. sciences

Hrachya Babujyan (AANL)

D.p-m.s., corr. member of RAS

Alexander Belavin (IITP RAS)

Leading organization:

L. D. Landau Institute for Theoretical Physics, Chernogolovka, Russia

The defence will take place on the 11<sup>th</sup> of March 2024 at 14:00 during the “Physics” professional council session of HESC 024 acting within AANL (2 Alikhanyan brothers str., 0036, Yerevan).

The dissertation is available at AANL library.

The synopsis is sent out on the 31<sup>st</sup> of January 2024.

Scientific secretary of the special council:

Doctor of phys-math. sciences

Hrachya Marukyan

## Dissertation relevance

The dissertation discusses two interconnected topics, both of which have a lot of research interest, especially after recent development of quantum computation concept. Quantum computers' need for stable and yet alterable states of matter for storing information has multiplied the importance of topological insulators beyond being purely theoretically interesting systems.

Arguably the most famous phenomenon featuring such properties is Integer Quantum Hall Effect (IQHE). It's the quantum enhancement of the classical Hall Effect: the phenomenon of occurrence of transverse electrical current inside the magnetic field, except for large enough magnetic fields, where the system develops metal-insulator transition series [1], best known as Hall plateau transitions. Those transitions have a topological origin. The qualitative explanation of IQHE was provided by Chalker and Coddington [2] with their phenomenological model (CC model). Up to now CC model itself is a topic of interest and researchers are still studying its properties, such as the nature of the renormalization group, the corresponding conformal field theory for Hall plateau transitions [4].

However the model doesn't fully explain the phenomenon of IQHE, as there is a discrepancy between the theoretically (numerically) calculated and experimentally measured value of the localization length exponent. While some authors blame the difference on inaccuracy of either numerical calculations or on experimental errors, others imply a fundamental problem with CC model itself. As IQHE is an Anderson localization-delocalization transition, disorder plays the key role in the model. For CC model considers the disorder only through magnetic-field-induced wave function phase randomness, whereas a modified model suggests including the geometrical disorder of the lattice, thus introducing random network (RN) models [3, 5]. It seems to fix the disagreement with the experiment, however some authors claim that the disagreement is fixed only because of fine-tuned parameters, and others continue to point out unreliability of numerical analysis. The claim is, that there is no fundamental flaw in CC model and the newly introduced source of disorder either doesn't represent the

physical picture or doesn't contribute to critical exponents as they rely only on the universality class. Calculations and experiments to improve the accuracy of known values of localization length exponent are still ongoing [6].

The dissertation addresses all those issues. Firstly a deep geometrical link between RN model and real-life disorder is obtained [7]. Then the arbitrariness issue of RN model parametrization is resolved by connecting the parameters to properties of the matter, namely the semiconductor's compensation parameter. Unreliability of numerical analysis is addressed by introducing a brand new robust method of numerical analysis which is shown to replicate the previously known results. Finally, the generic argument of additional disorder sources' irrelevance based on Harris criterion is questioned by showing a need to modify Harris criterion in case of geometric nature of the disorder.

Another outstanding and versatile concept that features topological protection are Symmetry-protected topological (SPT) phases, which has huge research interest [8, 9]. It is a relatively new concept for phase transitions strongly related to the topological properties of the system, that is significantly different from the classical Landau definition of phases via local order parameters and carry topological characterization.

A deep understanding of SPT phases is presented in works of Xiao-Gang Wen and collaborators [10], where a classification of SPT states was formulated based on cohomology classes of discrete groups. A full classification of SPT phases in 1D systems is obtained and then generalised for  $d$ -dimensional systems. They report classification of SPT states in  $d$  dimensional spin models by cohomology groups  $H_{d+1}(G, U(1))$  where  $G$  is the initial model's gauge symmetry group. It allows to study some conceptual properties of SPT phase featuring models. However this doesn't result in explicitly written SPT models which could provide insight into the nature of SPT phases through specific models.

An interesting and important result of the explicitly written SPT model was reported in by M. Levin and Z.C. Gu [11], which is based on the paramagnetic Ising model with  $Z_2$  symmetry. The result is a model with two phases, one being a conventional

insulator (with a gapped spectrum), and the second being a topological insulator (with gapless spectrum created by edge states). No such model was known ever since.

In the dissertation two new models based on  $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  symmetric Potts models featuring SPT phases are presented [12, 13], inspired by [11]. Their corresponding edge models are explicitly written and scrupulously studied. The obtained interesting symmetry properties and their further analysis is used to identify the conformal field theory (CFT) of the studied edge models in thermodynamic limit. The approach for model creation is then generalized for an arbitrary (not necessarily abelian) group [14], and is applied to a  $Z_2$  Ising ferromagnet [15].

## **Purpose and objectives**

The purpose of the dissertation is to study and develop a better understanding of edge-state-related phenomena, particularly for IQHE and SPT ordered systems.

For IQHE the issue of discrepancy between theoretical and experimental results and the surrounding discussions is addressed. The objective is to answer important questions within the scope of the problem:

1. Prove the gravitational origin of the disorder introduced by RN models and show its connection to real-life situation.
2. Dismiss the arbitrariness of parameter choice in RN model by establishing a link between RN and RP models and providing a connection between bare parameters of the models to experimentally measurable physical parameters of materials, thus allowing further experimental verification of the proposed model.
3. Address the issue of reliability of numerical calculations by developing a more robust and reliable way of calculations for localization length exponent. Test the previously obtained results via comparison.
4. Develop an understanding of applicability of Harris criterion on systems with geometry disorder.

For SPT-ordered systems the objective is to fill the lack of specific edge models, studying which will arguably allow more intuitive understanding of SPT models, their different phases:

1. Derive new specific SPT models following the approach of [11]. Develop the model derivation approach to obtain explicitly written translational-invariant edge models based on desired non-interacting models.
2. Research the different phases of newly developed models, determine their important physical properties, detect the hidden symmetries, study the spectrum and find the associated CFT-s corresponding to the models' thermodynamic limit.
3. Develop a universal technique for generation of models with SPT-order and explicitly written edge Hamiltonian based on arbitrary symmetry group. Attempt to create an SPT model based on an initially interacting system.

### **Novelty of results**

1. For IQHE, starting from a random potential model, a map onto the 2D disordered graphs depending on the Fermi level is explicitly constructed via curvature distribution analysis, thus giving an interpretation of the replacement probability of RN model in terms of the Fermi energy.
2. A deep link between random potentials in Anderson localization problem and 2D curved surfaces where the edge states responsible for Hall plateau transitions live is revealed. The existence of effective gravity is revealed.
3. Further introduction of an RP model with Coulomb potential allows to couple the bare parameters of previously discussed theories with quantities that are experimentally measurable.
4. An alternative, faster and more reliable technique (namely, the S-matrix calculation) for numerical studies is proposed. Numerical data is obtained and the validity of previously known results [3] are proven.
5. Preliminary results claiming inapplicability of Harris criterion in case of geometrical disorder of RN model of IQHE is presented.

6. Two new SPT models based on  $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  symmetries are constructed, explicit form of their edge Hamiltonians is obtained. The models exhibit gapless spectrum allowing for metal-insulator transitions.
7. The obtained  $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  edge models are scrupulously studied. Hidden symmetry properties are discovered. The corresponding CFT-s describing the large-size low-energy limit of the models are identified through first excitation gap, entanglement entropy and current algebra analysis.
8. The previously used ideas for SPT model creation is generalised for an arbitrary symmetry group and a technique for creation of models with translational-invariant edge Hamiltonians is developed. The technique is applied on a  $Z_2$  Ising ferromagnet, thereby producing the first ever model based on an initially interacting system.

### **Practical significance**

1. For IQHE, the obtained mapping between bare parameters of RN model and experimentally measurable parameters can be used to decisively confirm the correctness of RN model, proving that the lack of consideration of emergent gravity in CC model is indeed a fundamental flaw.
2. The proposed  $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  models and their study as well as the techniques used during development of the models can provide a deeper understanding of SPT order phenomenon.
3. The generalized procedure of SPT edge model generation can be used to continue the development and study of other explicitly written models.
4.  $Z_2$  ferromagnetic SPT models as well as other experimentally realizable models that feature topological conductivity (such as in IQHE) are primary candidates to serve as information storing units in quantum computers.

## Dissertation contents

**The introduction** discusses relevance and importance of systems featuring topological properties in current technological advancements. It refers to two kinds of such systems which will be later discussed in the dissertation. Current developments and the problems in corresponding research directions are presented.

**Chapter 1** is dedicated to integer quantum Hall effect (IQHE) and discusses known issues in widely accepted models alongside with the possible solutions.

It provides the experimental picture as well as the classical and quasiclassical explanations. The mechanism for the experimental validation of models is introduced.

§ 1.1 discusses network models of IQHE.

§ 1.1.1 gives insight to regular network models, introduces the used mathematical apparatus. The known discrepancy between the theoretical and experimental values for the localization length exponent is pointed out and its possible sources are discussed.

§ 1.1.2 presents random network (RN) models as a solution to the known discrepancy. It discusses the randomness creation procedure and states the gravitational origin of such modification.

§ 1.2 discusses random potential (RP) models of IQHE. It establishes a space-curvature-related link between RN models and the features of a random potential (via potential critical points), thus restating the importance of gravity.

§ 1.2.1 is about an RP model with Gaussian sources. Here a mapping between RP and RN model parameters is created, showing the mutual reflectivity of the models.

§ 1.2.2 is about an RP model with Coulombian sources. It is a more realistic and complicated approach to RP models. Here an RP-RN mapping is established once again. A further connection between the model parameters and experimentally obtainable values is discovered.



§ 1.3 addresses issues with calculations that one faces in RN model calculations. A need for an alternative approach is stated.

§ 1.3.1 formulates the S-matrix approach to RN model calculations and shows its advantages over the widely used methods.

§ 1.3.2 presents numerical calculations which prove the validity of S-matrix approach and its advantages. Obtained results also replicate previously obtained results for a controversial RN model thus proving its correctness once again.

§ 1.4 indicates further study directions.

§ 1.4.1 discusses Harris criterion and whether it is applicable in case of disturbances of gravitational origin, particularly in case of RN models. Preliminary results are presented, which suggest a need for modification of the criterion.

§ 1.5 contains supplementary materials for **Chapter 1**.

§ 1.5.1 discusses Landau levels in context of IQHE

§ 1.5.2 provides insights to definition of curvature on discrete surfaces.

§ 1.5.3 explains technical details of extracting critical point mesh from a low-resolution simulated potential that is necessary for § 1.2.2.

**Chapter 2** is about systems that feature symmetry protected topological (SPT) phases.

A basic explanation of SPT phases' nature is given.

§ 2.0.1 introduces the cohomologies of finite groups. This concept will be heavily used throughout the chapter.

§ 2.1 is about SPT models based on  $(\times Z_3)^3$  symmetry.

Previously done related work is discussed.

§ 2.1.1 discusses the emergence of SPT states for  $(\times Z_3)^3$  symmetric three-state Potts paramagnet. **(a)** Three-state Potts model is introduced. **(b)** Non-trivial cohomology element for  $(\times Z_3)^3$  symmetry group and the corresponding transformation operator are obtained. **(c)** The application of the cohomology element to generate a model featuring SPT phases is done.

§ 2.1.2 considers the separation of system edge from the bulk. **(a)** The action of transformation on a system with a boundary is discussed, the separation from the bulk is shown by introducing ghost nodes. **(b)** Explicit expression of a Hamiltonian for system edge is obtained. **(c)** Useful alternative representations of the Hamiltonian are provided.

§ 2.1.3 addresses the symmetries and conformal properties of the edge model obtained in 2.1.2. **(a)** simple global discrete finite symmetries are obtained and their 't Hooft anomalies are calculated. **(b)** more complex symmetries are discovered, their nature and relation with other symmetries is discussed. **(c)** The corresponding current algebra are obtained and studied, their anomaly is determined. **(d)** Conformal properties of the edge model are obtained via first excitation gap and entanglement entropy analysis. **(e)** The conformal field theory (CFT) that corresponds to the thermodynamic limit of the obtained model is identified. It is the  $SU_2(3)/SU_2(2)$  coset CFT.

§ 2.1.4 discusses further possibilities to study the considered model.

§ 2.2 is about SPT models based on  $Z_3$  symmetry.

§ 2.2.1 discusses the creation of  $Z_3$  SPT models. Non-trivial cohomology element for  $Z_3$  symmetry group and the corresponding initial transformation operator are obtained. They are later optimized to result in a translational invariant edge Hamiltonian without ghost node introduction. The edge Hamiltonian itself is consequently generated through a non-arbitrary symmetrization procedure.

§ 2.2.2 refers to symmetries of edge Hamiltonian. Firstly the simpler global finite symmetries are obtained, then more complicated "winding number" symmetry and the

corresponding current algebra are discussed. The related 't Hooft anomaly is explicitly calculated.

§ 2.2.3 shows alternative representations of the considered edge Hamiltonian which can be used to further study the system. It is shown, that the “winding number” symmetry is unique for this model.

§ 2.2.4 studies the conformal properties of the considered model via first excitation gap, entanglement entropy and current algebra anomaly analysis. The obtained information allows to identify the CFT corresponding to the obtained model’s thermodynamic limit. It is the  $SU_1(3)/SU_1(2)$  coset CFT.

§ 2.3 is a generalization of methods used in § 2.1 and in § 2.2 to create SPT edge models based on arbitrary symmetry group.

§ 2.3.1 discusses the mechanism of model induction via non-trivial cohomology group elements. Two similar formulations are discussed. The compliance of transformation with SPT model definitions is checked and the condition for edge-bulk separation (commutativity) is obtained. Mathematical formalism for obtaining the needed cohomology element is presented.

§ 2.3.2 refers to construction of the edge model. The generic form for symmetrized edge Hamiltonian is given. A condition to induce a translational invariant edge model is obtained for the non-trivial cohomology element, and the transformation to satisfy the condition is discussed.

§ 2.3.3 applies the developed technique on Ising ferromagnet which is an initially interacting model with  $Z_2$  gauge symmetry. It is argued that unlike previous models this one has a chance for experimental realization. The translational invariant edge Hamiltonian is explicitly written, leaving its study for further research.

**The summary** briefly presents the information discussed throughout the dissertation and states its main results.

## Main results

- Duality of geometrical (gravitational) origin is established between RP and RN models,
- A pathway for an experimental verification of the RP model is created,
- A robust technique for network models' numerical calculations is developed,
- Two-dimensional  $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  SPT paramagnet edge models are formulated and scrupulously studied, the corresponding low-energy CFT-s are identified,
- Experimentally realizable  $Z_2$  SPT ferromagnet model is formulated.

## Conclusion

The dissertation outlines the practical value and importance of studying two-dimensional nontrivial boundary states, giving examples of systems with the presence of such states: the integer quantum Hall effect (IQHE) and symmetry protected topological order (SPT order). For IQHE, a review of generally accepted models and known experimental data is provided, existing inconsistencies are mentioned, and their possible causes are discussed. General considerations about SPT ordering and SPT phases are discussed, their physical properties are mentioned, and the current situation with their classification and research in general is noted.

An analysis of the Chalker-Coddington (CC), random network (RN) and random potential (RP) models describing the IQHE is presented. A fundamental shortcoming of the CC model is pointed out and the importance of geometry and its randomness (effective gravity) is emphasized, which explains the difference between the numerical calculation based on the CC model and experimental data. The deep geometric connection that exists between the RN and RP models is shown. By comparing the curvature distributions in the RN and RP models, their an unambiguous correspondence is found. Then a connection is derived between the "bare" parameters of the models and the quantities measured in the experiment, which opens up the possibility of experimental verification of the proposed models. Potential problems associated with the generally accepted calculation method in network models - the transfer matrix

approach - are presented, and an alternative calculation technique with the S-matrix approach is proposed. With the new approach, calculations are carried out to check the reliability of the data for the formulated models obtained in the past. The applicability of the Harris criterion in the context of this problem is discussed.

For SPT-ordered systems, the mathematical formulation of systems with SPT phases and the classification of their phases is first provided, then, on this basis, SPT extensions of specific models ( $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  paramagnets and  $Z_2$  Ising ferromagnet) are derived and studied. For models based on  $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  paramagnets, translation-invariant expressions of Hamiltonians corresponding to boundary states for different phases are explicitly derived, and their in-depth study is carried out. Before these works, only one similar model was known, based on the  $Z_2$  paramagnet (Levin-Gu model). For the derived Hamiltonians, new nontrivial symmetries of topological origin are found. By examining the current algebras of these symmetries, as well as the entanglement entropy and other properties of the system, a conformal field theory (CFT) corresponding to the low-energy limit of the derived boundary models is identified. Further, the above methods for constructing models are generalized for an arbitrary symmetry group and applied to the  $Z_2$  Ising ferromagnet. The result is a model that, in principle, can be implemented experimentally.

### **Author's relevant published papers**

1. R. Conti, H.Topchyan, R.Tateo, and A.Sedrakyan, "Geometry of random potentials: Induction of two-dimensional gravity in quantum hall plateau transitions," Phys. Rev. B, vol.103, p.L041302, Jan. 2021
2. H. Topchyan, V.Iugov, M.Mirumyan, S.A.Khachatryan, T.S.Hakobyan, and T. A.Sedrakyan, " $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  symmetry protected topological paramagnets," Journal of High Energy Physics, vol.2023, no.12, p.199, Dec. 2023
3. H. Topchyan, "Generic technique for explicit definition of models with spt phases," Arm.J.-Phys, vol.16, pp.72–82, Sep. 2023

## References

- [1] K.v.Klitzing, G.Dorda and M.Pepper, “New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance,” Phys. Rev.Lett., vol.45, pp.494–497, Aug 1980
- [2] J.T.Chalker and P.D.Coddington, “Percolation, quantum tunnelling and the integer hall effect,” Journal of Physics C: Solid State Physics, vol.21, no.14, pp.2665–2679, May 1988
- [3] I. A.Gruzberg, A.Kluemper, W.Nuding, and A.Sedrakyan, “Geometrically disordered network models, quenched quantum gravity, and critical behavior at quantum hall plateau transitions,” Phys. Rev.B, vol.95, p.125414, Mar 2017
- [4] M. R.Zirnbauer, “The integer quantum hall plateau transition is a current algebra after all,” Nuclear Physics B, vol.941, pp.458–506, 2019
- [5] A. Kluemper, W.Nuding, and A.Sedrakyan, “Random network models with variable disorder of geometry,” Phys. Rev.B, vol.100, p.140201, Oct 2019
- [6] M. Puschmann, P.Cain, M.Schreiber, and T.Vojta, “Integer quantum hall transition on a tight-binding lattice,” Phys. Rev.B, vol.99, p.121301, Mar 2019
- [7] R. Conti, H.Topchyan, R.Tateo, and A.Sedrakyan, “Geometry of random potentials: Induction of two-dimensional gravity in quantum hall plateau transitions,” Phys. Rev. B, vol.103, p.L041302, Jan 2021
- [8] Y. Chen, X.-T.He, Y.-J.Cheng, H.-Y.Qiu, L.-T.Feng, M.Zhang, D.-X.Dai, G.-C. Guo, J.-W.Dong, and X.-F.Ren, “Topologically protected valley-dependent quantum photonic circuits,” Phys. Rev. Lett., vol.126, p.230503, Jun 2021
- [9] K. Kawagoe and M.Levin, “Anomalies in bosonic symmetry-protected topological edge theories: Connection to f symbols and a method of calculation,” Phys. Rev. B, vol.104, p. 115156, Sep 2021

- [10] X.-G. Wen, “Colloquium: Zoo of quantum-topological phases of matter,” *Rev. Mod. Phys.*, vol.89, p.041004, Dec 2017
- [11] M. Levin and Z.-C.Gu, “Braiding statistics approach to symmetry-protected topological phases,” *Phys. Rev. B*, vol.86, p.115109, Sep2012
- [12] H. Topchyan, V.Iugov, M.Mirumyan, S.A.Khachatryan, T.S.Hakobyan, and T. A.Sedrakyan, “ $Z_3$  and  $(\times Z_3)^3$  symmetry protected topological paramagnets,” *Journal of High Energy Physics*, vol.2023, no.12, p.199, Dec2023
- [13] H. Topchyan, V.Iugov, M.Mirumyan, T.S.Hakobyan, T.A.Sedrakyan, and A.G.Sedrakyan, “Two-dimensional topological paramagnets protected by  $Z_3$  symmetry: Properties of the boundary hamiltonian,” arXiv:2312.15095, 2023
- [14] H. Topchyan, “Generic technique for explicit definition of models with spt phases,” *Arm.J.-Phys*, vol.16, pp.72–82, Sep2023
- [15] H. Topchyan, “Spt extension of  $Z_2$  quantum ising model’s ferromagnetic phase,” arXiv:2306.13170, 2023

## **Եզրային վիճակները քվանտային Հուլի էֆֆեկտում և տոպոլոգիական մեկուսիչներում**

### **Ամփոփագիր**

Ատենախոսությունում նշվում է երկչափ համակարգերում ոչ տրիվիալ եզրային վիճակների կիրառական նշանակությունը և ուսումնասիրման կարևորությունը, բերվում են այդպիսի վիճակներ ցուցաբերող երևույթների օրինակներ՝ Հուլի ամբողջ-թվային քվանտային երևույթը (ՀԱՔԵ) ու սիմետրիայով պաշտպանված տոպոլոգիական (ՄՊՏ) փուլերը: ՀԱՔԵ համար ներկայացվում է ներկայումս գոյություն ունեցող մոդելներն ու առկա փորձարարական արդյունքները, նշվում է հայտնի անհամապատասխանությունների և դրանց հնարավոր աղբյուրների մասին: Խոսվում է ՄՊՏ փուլերի վերաբերյալ ընդհանուր պատկերացումների, դրանց ֆիզիկական հատկությունների մասին, նշվում է դրանց դասակարգման և ուսումնասիրման հետ կապված ներկայիս դրությունը:

Կատարվում է ՀԱՔԵ նկարագրող Չալկեր-Կոդդինգտոնի (ՉԿ), պատահական ցանցերի (ՊՑ) և պատահական պոտենցիալների (ՊՊ) մոդելների վերլուծություն: Ներկայացվում է ՉԿ մոդելի մեջ առկա ֆունդամենտալ թերությունը և ընդգծվում է մոդելների երկրաչափության և դրա պատահականության (էֆֆեկտիվ գրավիտացիայի) կարևորությունը, ինչով էլ բացատրվում է ՉԿ մոդելով իրականացված հաշվարկի և փորձարարական արդյունքի հակասությունը: Ի հայտ է բերվում ՊՑ և ՊՊ մոդելների միջև առկա խորը երկրաչափական կապը: ՊՑ և ՊՊ մոդելներում կորությունների բաշխման վերլուծության միջոցով կատարվում է դրանց փոխմիարժեք համապատասխանեցում: Դուրս են բերվում մոդելներում առկա «մերկ» պարամետրերի և փորձնականորեն չափվող ֆիզիկական մեծությունների միջև կապեր, ինչը ճանապարհ է բացում փորձարարական ճանապարհով մոդելների ճիշտ լինելը ստուգելու համար: Ներկայացվում է ՊՑ մոդելներում հաշվարկային տեխնիկայի՝ տրանսֆեր-մատրիցական մոտեցման պոտենցիալ խնդիրները և ներկայացնում ալտերնատիվ՝ S-մատրիցական մոտեցմամբ հաշվարկի



տեխնիկա: Նորացված տարբերակով իրականացվում են հաշիվներ՝ ստուգելով նախկինում սահմանված մոդելների շրջանակներում արված հաշվարկների ճշմարիտությունը: Քննարկվում է Հարրիսի հայտանիշի կիրառելիությունը տվյալ խնդրի պարագայում:

Բերվում է ՄՊՏ փուլեր ցուցաբերող մոդելների և դրանց փուլերի դասակարգման մաթեմատիկական կողմը, հետո դրա հիման վրա դուրս են բերվում և ուսումնասիրվում են կոնկրետ մոդելների ( $Z_3$  և  $(\times Z_3)^3$  պարամագնիսները և  $Z_2$  Իզինգի ֆերոմագնիսը) ՄՊՏ ընդլայնումները:  $Z_3$  և  $(\times Z_3)^3$  պարամագնիսների վրա հիմնված մոդելների համար բացահայտ տեսքով արտածվում են տարբեր փուլերին համապատասխանող եզրային վիճակների տրանսլյացիոն ինվարիանտ համիլտոնյանները, իրականացվում է դրանց խորը ուսումնասիրություն: Նշվում է, որ մինչ նշված աշխատանքները հայտնի էր բացահայտ տեսքով գրված միայն մեկ՝  $Z_2$  պարամագնիսի վրա հիմնված՝ Լևին-Գուլի մոդելը: Դուրս բերված եզրային մոդելների համար բացահայտվում են լրացուցիչ ոչ տրիվիալ, տոպոլոգիական բնույթ ունեցող սիմետրիաներ: Սիմետրիաներին համապատասխան հոսաքների հանրահաշիվների, ինչպես նաև համակարգի վիճակների խճճվածության էնտրոպիայի և այլ հատկանիշների ուսումնասիրության միջոցով իդենտիֆիկացվում է եզրային մոդելների ցածր-էներգիական սահմանին համապատասխանող կոնֆորմ դաշտի տեսությունները (ԿՆՏ): Հաջորդիվ վերը նշված դեպքերում կիրառված՝ եզրային մոդելները ստեղծելու մեթոդն ընդհանրացվում է կամայական սիմետրիայի խմբի համար և կիրառում այն  $Z_2$  Իզինգի ֆերոմագնիսի վրա: Արդյունքում ստացվում է բացահայտ տեսքով գրված ՄՊՏ եզրային մոդել մի համակարգի համար, որը տեսականորեն հնարավոր է ռեալիզացնել փորձում:

Եզրակացության մեջ ամփոփված են աշխատանքում բերված կարևոր դրույթները և ձևակերպված են ատենախոսության հիմնական արդյունքները:

# Граничные состояния в квантовом эффекте Холла и топологический инсуляторах

## Резюме

В диссертации изложена практическая ценность и важность исследования двумерных нетривиальных граничных состояний, приводятся примеры систем с наличием подобных состояний: целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ) и топологическая упорядоченность защищенная симметрией (СПТ-упорядоченность). Для ЦКЭХ приводится обзор общепринятых моделей и известных экспериментальных данных, упоминается о существующих несоответствиях и обсуждаются их возможные причины. Говорится об общих соображениях об СПТ-упорядоченности и СПТ фазах, обсуждаются их физические свойства, и отмечается текущая ситуация с их классификацией и исследованием в целом.

Приводится анализ моделей Чалкера-Коддингтона (ЧК), случайной решетки (СР) и случайных потенциалов (СП) описывающих ЦКЭХ. Говорится о фундаментальном недостатке модели ЧК и подчеркивается важность геометрии и ее случайности (эффективной гравитации), чем и объясняется разница между численным расчетом основанном на модели ЧК и экспериментальными данными. Показывается глубокая геометрическая связь существующая между моделями СР и СП. Путем сравнения распределений кривизны в моделях СР и СП находится их однозначное соответствие. Выводится связь между “голыми” параметрами моделей и измеряемыми в эксперименте величинами, что открывает возможность для экспериментальной проверки правильности той или иной модели. Приводятся потенциальные проблемы связанные с общепринятым методом вычисления в решеточных моделях – трансфер-матричном подходе, и предлагается альтернативная техника расчетов с  $S$ -матричным подходом. С новым подходом проводятся вычисления, проверяющие достоверность данных для

сформулированных моделей полученных в прошлом. Обсуждается применимость критерия Харриса в контексте данной задачи.

Для СПТ-упорядоченных систем сначала приводится математическая формулировка систем с СПТ фазами и классификации их фаз, затем на этом основании выводятся и исследуются СПТ расширения конкретных моделей ( $Z_3$  и  $(\times Z_3)^3$  парамагнетики и  $Z_2$  ферромагнетик Изинга). Для моделей основанных на  $Z_3$  и  $(\times Z_3)^3$  парамагнетиков в явном виде выводятся трансляционно-инвариантные выражения гамильтонианов, соответствующих граничным состояниям для разных фаз, и проводится их глубокое исследование. До данных работ была известна одна единственная подобная модель, основанная на  $Z_2$  парамагнетике (модель Левина-Гу). Для выведенных гамильтонианов находятся новые нетривиальные симметрии топологического происхождения. Путем исследования алгебр токов данных симметрий, а также энтропии запутанности и других свойств системы идентифицируется конформная теория поля (КТП) соответствующая низкоэнергетическому пределу выведенных граничных моделей. Далее вышеприведенные методы конструирования моделей обобщаются для произвольной группы симметрии и применяется к  $Z_2$  ферромагнетике Изинга. В результате получается модель, которую в принципе возможно реализовать экспериментально.

В заключении представлены важные положения приведенные в работе и сформулированы основные результаты диссертации.



